

Tijd van 9:00 - 12:00 uur

MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je naam.

Op vel 1: **studentnummer, naam, adres, postcode, woonplaats** en **studierichting**.

De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

Opgave 1.

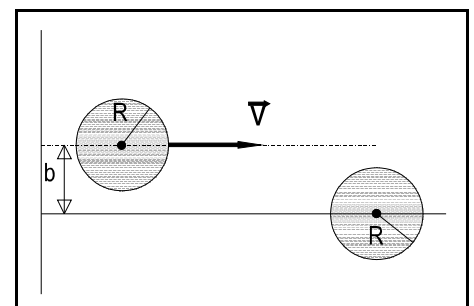
In het x - y -vlak ondervindt een deeltje een kracht $\vec{F}(x, y) = A \cdot \hat{y} + B \cdot \frac{(x \hat{x} + y \hat{y})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Hierbij zijn A en B constanten.

- Beargumenteer (geen berekening!) waarom de kracht conservatief is.
- Bereken de potentiaal $U = U(x, y)$ van deze kracht.
- Bereken de arbeid die de kracht verricht als het deeltje zich verplaatst van het punt $(a, -b)$ naar (a, b) , waarin a en b bepaalde constanten zijn.

Opgave 2.

Een homogene schijf met massa m en straal R , heeft een snelheid \vec{v} . Een tweede, identieke schijf ligt stil. De botsingsparameter is b (zie figuur 1).

- Bereken de snelheid van het zwaartepunt van beide schijven.
- Bereken het totale impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt.
- Op een gegeven moment botsen beide schijven op elkaar en blijven daarna aan elkaar vast zitten. Bereken het traagheidsmoment van beide schijven na de botsing ten opzichte van hun zwaartepunt.
- Bereken de hoeksnelheid ω waarmee beide schijven na de botsing om hun zwaartepunt gaan draaien.
- Bereken het kinetische energieverlies tijdens de botsing als functie van de botsingsparameter b .

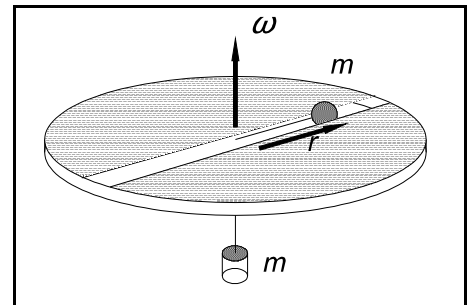


Figuur 1.

Opgave 3.

In een horizontaal opgestelde schijf is een sleuf aangebracht waarin zich een kogel met massa m bevindt. De sleuf loopt door het centrum van de schijf, waarin een gat zit. Door dit gat loopt wrijvingsloos een dunne draad die de kogel verbindt met een massa, eveneens ter grootte m , die er onder hangt.

De schijf draait rond met een constante hoeksnelheid ω . De afstand van de kogel tot het gat is r .

**Figuur 2.**

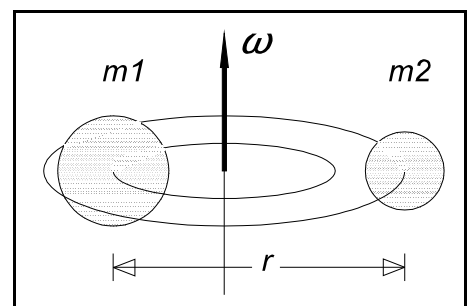
- Leidt een bewegingsvergelijking voor de kogel af waarin alleen r als variabele voorkomt.
- Voor één bepaalde waarde r_0 van r is de baan van de kogel een cirkel. Bereken de waarde van r_0 uitgedrukt in ω .
- De oplossing van de bewegingsvergelijking uit a. wordt gegeven door:

$$r(t) = A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot e^{-\lambda t} + r_0$$

Bereken A en B als op het tijdstip $t = 0$ geldt dat $r(0) = r_1$ en $\dot{r}(0) = 0$.

Opgave 4.

Een dubbelster bestaat uit twee sterren die samen om hun zwaartepunt draaien. Soms gaat daarbij een stroom massa van de ene ster naar de andere ster. Gegeven is zo'n dubbelster met massa's m_1 resp. m_2 en een onderlinge afstand r . De sterren mogen worden opgevat als puntmassa's.

**Figuur 3.**

- Bereken de hoeksnelheid waarmee de dubbelster ronddraait, uitgedrukt in de totale massa $M = m_1 + m_2$ en de onderlinge afstand r .
- Bereken het impulsmoment van de dubbelster ten opzichte van het zwaartepunt en druk dit uit in de gereduceerde massa μ en de afstand r .
- Tijdens de massastroom van de ene ster naar de andere blijft, behalve de totale massa M , ook het totale impulsmoment behouden.
 Stel dat in eerste instantie geldt: $m_1 = 3m$ en $m_2 = 2m$ en vervolgens een massa ter grootte $\frac{1}{2}m$ van m_2 naar m_1 gaat.

Bereken de nieuwe onderlinge afstand r' van de sterren na afloop van dit massatransport, uitgedrukt in de oorspronkelijke afstand r .

UITWERKING tentamen AN-1A 1992

- 1a) Voor de kracht kan men schrijven: $\vec{F} = A\hat{y} + B\frac{\vec{r}}{r^3}$; deze bestaat dus uit een kracht met een constante richting en een centrale kracht. Beide zijn conservatief, dus ook \vec{F} .

b) Uit $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + -\frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} = B\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{x} + (A + B\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}})\hat{y}$ volgt:

$$U(x, y) = -Ay + \frac{B}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

c) De verrichte arbeid is: $\int_{(a, -b)}^{(a, b)} \vec{F} \cdot d\vec{y} = [-U(x, y)]_{(a, -b)}^{(a, b)} = 2bA$

2a) $2m\vec{v}_{CM} = m\vec{v} + 0 \rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{1}{2}\vec{v}$

- b) Als \vec{r} de plaatsvector is van de ene schijf naar de andere, dan geldt:

$$\vec{J}_{CM} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{m^2}{2m} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2}mbv\hat{z}$$

c) $I_{CM} = 2 \cdot (\frac{1}{2}mR^2 + mR^2) = 3mR^2$

d) Het impulsmoment blijft behouden: $\frac{1}{2}mbv = 3mR^2\omega \rightarrow \omega = \frac{b}{6R^2}$

- e) De zwaartepuntsenergie blijft behouden; alleen de relatieve energie verandert:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot 3mR^2 \cdot (\frac{b}{6R^2})^2 = \frac{1}{4}mv^2 \cdot (1 - \frac{b^2}{6R^2})$$

- 3a) Beschouw de kogel en de massa als één geheel in een uniform roterend stelsel, dan werkt daarop een zwaartekracht en een schijnkracht. De Corioluskracht wordt gecompenseerd door een zijwaartse kracht van de sleuf op de kogel. Er volgt dan:

$$2m\ddot{\vec{r}} = m\omega^2\vec{r} - mg\hat{r} \rightarrow 2\dot{\vec{r}} = \omega^2\vec{r} - g$$

b) Voor de cirkelbaan geldt: $m\omega^2 r_0 = mg \rightarrow r_0 = \frac{g}{\omega^2}$

c) $\dot{r}(0) = 0 \rightarrow (\lambda A - \lambda B) = 0 \rightarrow A = B$

$$r(0) = r_1 \rightarrow A + B + r_0 = r_1 \rightarrow A = B = \frac{1}{2} \cdot (r_1 - r_0)$$

4a) Voor de afstand r_1 van m_1 tot het zwaartepunt geldt: $r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r = \frac{m_2}{M} r$.

De centripetale kracht wordt geleverd door de gravitatiekracht, zodat:

$$m_1\omega^2 r_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow \omega = \sqrt{G\frac{m_2}{r^2} \cdot \frac{M}{m_2 r}} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

$$b) \quad J = \mu \omega r^2 = \mu \sqrt{\frac{GM}{r^3}} r^2 = \sqrt{GM} \mu r^{\frac{1}{2}}$$

$$c) \quad J \text{ blijft behouden: } \frac{3m \cdot 2m}{5m} \cdot r^{\frac{1}{2}} = \frac{(3\frac{1}{2}m) \cdot (1\frac{1}{2}m)}{5m} \cdot r'^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad r' = \left(\frac{8}{7}\right)^2 r \approx 1,3 r$$

VOORSTEL VOOR NORMERING TENTAMEN

totaal

Opgave 1	a	2	
	b	4	
	c	3	9
Opgave 2	a	1	
	b	2	
	c	2	
	d	2	
	e	2	9
Opgave 3	a	4	
	b	2	
	c	3	9
Opgave 4	a	3	
	b	3	
	c	3	9

Cijfer = (aantal punten)/4 + 1

Rekenfouten: -0.5